

奇异值与特征值分解在谐波源定阶中的等价性*

熊杰锋^{1,2} 王柏林² 孙艳³

(1.南京信息工程大学 电子信息工程学院 南京 210044 ;

2.河海大学 电气工程学院 南京 210098 ;3.江苏省地方税务局 南京 210024)

摘要 现代谱估计理论较好的解决了随机白噪声下平稳的电力系统谐波和间谐波模型的求解问题,算法的关键在于准确的确定谐波和间谐波源的个数,称为“定阶”,定阶的方法有奇异值分解和特征值分解两种。本文通过理论推导论证两种定阶方法本质上是等价的,并对实测的电弧炉电流波形,采用 Esprit 进行仿真验证。

关键词:谐波;特征值分解;奇异值分解;现代谱估计

中图分类号:TM76

文献标识码:A

文章编号:1001-1390(2009)07-0006-03

The Rank-decision Equality of Singular Value and Eigen Value Decomposition for Harmonics Analysis

XIONG Jie-feng^{1,2}, WANG Bo-lin², SUN Yan³

(1. College of Electronic and Information Engineering, Nanjing University of Information Science and Technology, Nanjing 210044, China. 2. College of Electric Engineering, Hohai University, Nanjin 210098, China. 3. Jiangsu Local Taxation Bureau, Nanjing 210024, China)

Abstract: Harmonics and inter-harmonics in power system are often considered as a stationary signal with white noise. Advanced Spectrum Estimation, used for stationary signal analysis, are efficient methods for their measurement. Estimating the numbers of the harmonics and inter-harmonics is the main point of these methods, named Rank-Decision. The normal way of Rank-Decision is singular value decomposition (SVD) and eigen value decomposition (EVD). The Rank-Decision equality of SVD and EVD is proved in the paper. The ESPRIT method is also used to prove this equality for a field current signal of an arc furnace.

Key words: harmonics, eigen value decomposition, singular value decomposition, advanced spectrum estimation

0 引言

电力系统谐波和间谐波检测一直为广大学者关注的课题,随着人们对谐波和间谐波认识的不断加深,关注点已经逐渐从确定性的非噪声信号模型转向平稳和非平稳的谐波和间谐波信号模型,检测的方法也逐渐从经典的 DFT 加窗插值法转为现代谱估计法、小波和 HHT^[1-15]。

本文讨论随机白噪声影响下平稳的谐波和间谐波模型,现代谱估计可以从理论上较好的解决该模型的求解问题。谱估计法理论上具有无限小的信号频率分辨率,克服了传统 DFT 方法频率分辨率低的缺点,主要有 Pisarenko、扩展的 Prony、Music、Esprit 等。这些方法本质上均为基于向量子空间方法,算法的关键

在于对检测信号自相关函数阵进行“定阶”,即确定谐波频率分量的个数。定阶的方法有特征值或奇异值分解两种^[6-12],分别求取主特征值或主奇异值的个数作为信号频率个数的估计。本文通过理论推导和仿真验证,表明奇异值分解和特征值分解两种“定阶”方法本质上是等价的。

1 主奇异值和主特征值

平稳的电力系统谐波和间谐波模型一般表示为:

$$x(n) = \sum_{i=1}^h s_i e^{jn\omega_i} + \omega(n) \quad (1)$$

式中 $\omega(n)$ 为零均值、方差为 σ^2 的复值高斯白噪声过程。 m 点观测信号向量为:

$$x(n) \stackrel{\text{def}}{=} [x(n), \dots, x(n+m-1)]^T$$

* 江苏省高校自然科学基金资助项目(08kj470002)

选择 $m > h$ 观测向量 $x(n)$ 自相关矩阵为:

$$R_{xx} = E\{x(n)x(n)^H\} = A P A^H + \sigma^2 I \quad (2)$$

式中 $P = \text{diag}(E\{|s_1|^2\}, \dots, E\{|s_h|^2\})$; $A = [a(\omega_1) \ a(\omega_2) \ \dots, a(\omega_h)]$; $a(\omega_i) = [1 \ e^{j\omega_i} \ \dots \ e^{j(m-1)\omega_i}]^T$ 。

R_{xx} 为 $m \times m$ 复矩阵, 存在 $m \times m$ 正交酉矩阵 U 使得矩阵 R_{xx} 特征分解为:

$$R_{xx} = U \sum_i U^H$$

式中 $\sum_i = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ 。

预先定义一个非常接近 1 的阈值, 即:

$$v(\tilde{h}) = \left[\frac{\lambda_1^2 + \dots + \lambda_{\tilde{h}}^2}{\lambda_1^2 + \dots + \lambda_m^2} \right]^{\frac{1}{2}}, 1 \leq \tilde{h} \leq m$$

当 $v(\tilde{h})$ 大于或等于该阈值时, 则认为前面 \tilde{h} 个特征值是“主要的”。 \tilde{h} 作为谐波次数 h 的估计, 定阶为 \tilde{h} 。

R_{xx} 主奇异值定义和奇异值定阶方式与特征值分解相似, 具体定义和定阶方式参见文献[5]第 365 页。

2 信号自相关阵的特征值定阶

定义自相关阵:

$$R_{ss} = A P A^H$$

式中 $P = \text{diag}(E\{|s_1|^2\}, \dots, E\{|s_h|^2\})$ 。

由于 A 满列秩, 容易证明:

$$\text{rank}(R_{ss}) = \text{rank}(P) = h$$

表明自相关阵 R_{ss} 的秩即为信号谐波和间谐波的个数。然而实际处理中我们得到的是含噪声信号的自相关阵 R_{xx} , 通过对 R_{xx} 的特征值分解得到有效特征值个数 \tilde{h} 作为谐波次数 h 的估计。

2.1 R_{xx} 与 R_{ss} 特征值的关系

定义 λ_x 为 R_{xx} 特征值, λ_s 为 R_{ss} 特征值, 则:

$$|\lambda_x I - R_{xx}| = |(\lambda_x - \sigma^2) I - R_{ss}| = |\lambda_s I - R_{ss}| \quad (3)$$

由式(3)可得:

$$\lambda_x = \lambda_s + \sigma^2$$

2.2 R_{xx} 主特征值定阶

R_{ss} 非零特征值的个数不超过 $\text{rank}(R_{ss}) = h$, 其余的为 0^[5]。由 R_{xx} 与 R_{ss} 特征值的关系, R_{xx} 可对角化为:

$$U^H R_{xx} U = U^H R_{ss} U + \sigma^2 U^H U = \text{diag}(\lambda_{s1}, \dots, \lambda_{s\tilde{h}}, \rho, \dots, \rho) + \sigma^2 I \quad (4)$$

从式(4)可以得出实际观测信号 R_{xx} 特征值由两部分组成, 代表噪声空间的特征值 σ^2 和代表有效信号空间的主特征值 $\sigma^2 + \lambda_{st}$ 。

信噪比较高的时候, 通过计算 R_{xx} 特征值的有效范数确定 R_{xx} 有效特征值的个数 \tilde{h} 实现对谐波和间谐波个数定阶的估计, 即:

$$v(\tilde{p}) = \left[\frac{(\lambda_{s1} + \sigma^2)^2 + \dots + (\lambda_{s\tilde{h}} + \sigma^2)^2}{\lambda_{x1}^2 + \dots + \lambda_{xm}^2} \right]^{\frac{1}{2}} \geq \text{阈值}, 1 \leq \tilde{h} \leq m \quad (5)$$

由于 σ^2 为正, 较高信噪比下, 实现准确的定阶必须满足以下两个渐进条件: (1) λ_s 必须非负; (2) h 个谐波间谐波信号的 R_{ss} 必须有 h 个正的特征值。这样才能保证信噪比较高时 R_{xx} 有效特征值的估计 $\tilde{h} = h$, 实现信号的准确定阶。

命题 1: R_{ss} 矩阵的非负定性和 R_{xx} 正定性

证明: 令 $R_{ss} = A P A^H$, 展开成向量表示:

$$R_{ss} = A P A^H = \sum_{i=1}^h E\{|s_i|^2\} \alpha(\omega_i) \alpha(\omega_i)^H$$

进一步表示为二次型的形式:

$$y^H R_{ss} y = \sum_{i=1}^h E\{|s_i|^2\} Y^H \alpha(\omega_i) \alpha(\omega_i)^H Y = \sum_{i=1}^h E\{|s_i|^2\} |\alpha(\omega_i)^H y|^2$$

由于 $E\{|s_i|^2\} > 0$, $|\alpha(\omega_i)^H y|^2 \geq 0$, 故 $y^H R_{ss} y \geq 0$, R_{ss} 为非负定矩阵, 表明 R_{ss} 特征值 λ_s 为非负。由于 R_{xx} 特征值 $\lambda_x = \lambda_s + \sigma^2 > 0$, 故 R_{xx} 为正定矩阵。证毕!

命题 2: R_{ss} 非零特征值的个数与 R_{ss} 秩相等, 且 R_{ss} 非零特征值与 R_{ss} 非零奇异值个数相同大小相等。

证明: $\text{rank}(R_{ss}) = h$, 对 R_{ss} 进行奇异值分解有 h 个正奇异值, 且 R_{ss} 的奇异值为 $R_{ss} R_{ss}^H$ 特征值的正的平方根。由于 $R_{ss} = R_{ss}^H R_{ss} R_{ss}^H$ 特征值分解为:

$$|\varphi_s I - R_{ss} R_{ss}^H| = |(aI - R_{ss})(bI + R_{ss})| = |abI - bR_{ss} + aR_{ss} - R_{ss} R_{ss}^H| \quad (6)$$

由式(6)可得:

$$a = b, \mu^2 = \varphi_s$$

假设 $a > 0$, 则:

$$|\varphi_s I - R_{ss} R_{ss}^H| = |aI - R_{ss}| |(aI + R_{ss})|, |\varphi_s I - R_{ss} R_{ss}^H| = 0 \quad (7)$$

则 $|aI - R_{ss}| = 0$ 或 $|aI + R_{ss}| = 0$ 或 $|\varphi_s I - R_{ss} R_{ss}^H| = 0$ 或者两式同时为零。由于 R_{ss} 为非负定矩阵, 不存在小于 0 的特征值, 故仅有 $|aI - R_{ss}| = 0$, 故 $R_{ss} R_{ss}^H$ 特征值的正的平方根为 R_{ss} 特征值。表明 R_{ss} 非零特征值与 R_{ss} 非零奇异值相等。根据 R_{ss} 非零特征值的个数不超过 h , 且 $R_{ss} R_{ss}^H$ 仅有 h 个非零特征值, 故 R_{ss} 有且仅有 h 个非零特征值。证毕!

推论 1: R_{ss} 奇异值与特征值个数相同, 大小相等

证明: 由命题 2 可知 R_{ss} 的 h 个非零特征值是 R_{ss}

的 h 个非零奇异值。 R_{ss} 为非负定阵, 特征值 $\lambda_s \geq 0$, 有 $m-h$ 个零特征值, 与 R_{ss} 的 $m-h$ 个零奇异值相等。证毕!

2.3 奇异值和特征值定阶的一致性

R_{xx} 奇异值分解和特征值分解定阶的一致性等同于证明 R_{xx} 特征值与奇异值相等。

引理 1: R_{xx} 特征值与奇异值相等

证明: 已知 R_{xx} 特征值:

$$\lambda_x = \lambda_s + \sigma^2 > 0$$

$$R_{xx} R_{xx}^H = (R_{ss} + \sigma^2 I)(R_{ss} + \sigma^2 I)^H = (R_{ss} + \sigma^2 I)^2$$

根据矩阵多项式的特征值公式, 则 $R_{xx} R_{xx}^H$ 特征值为 $(\lambda_s + \sigma^2)^2$ 。

因为 R_{xx} 的奇异值为 $R_{xx} R_{xx}^H$ 特征值正的平方根, 故 R_{xx} 的奇异值为 $\lambda_s + \sigma^2$ 。

所以 R_{xx} 特征值与奇异值相等。证毕!

3 两种方法定阶的仿真

本文采用文献[8]的算例, 其为没有安装补偿装置的电弧炉电流波形, 由基波 (50Hz)、高次谐波 (125Hz) 和间谐波 (25Hz) 组成, 另外考虑了信噪比分别为 30dB、20dB、10dB

加性白噪声的情况, 如图 1 所示。采样间隔 0.5ms, 采样点为 100 个。本文对该波形用 ESPRIT 方法, 分别采用奇异值和特征值分解两种定阶方法, 阈值为 0.995, 采用最小二乘法求谐波的幅度。由于采用了实谐波模型进行分析, 在三种信噪比的情况下, 奇异值和特征值分解均把信号定阶为 6, 为复谐波模型阶数的 2 倍, 如表 1 所示。准确定阶后, 计算的谐波和间谐波信号的幅度和频率如表 2 所示。

4 结论

现代谱估计理论可以从理论上较好的解决随机白噪声影响下平稳的谐波和间谐波模型的求解问题, 这些方法本质上均为基于向量子空间方法, 算法的关

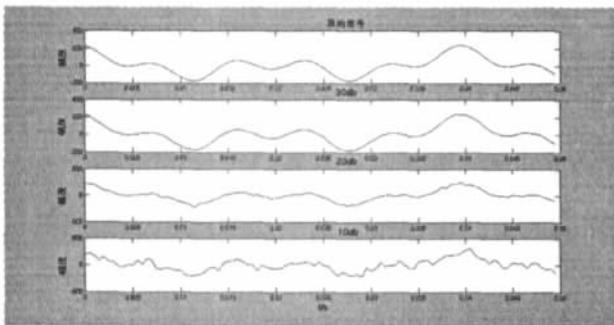


图 1 实际电网信号和信噪比为 30dB、20dB、10dB 的波形图
Fig.1 Original signal and polluted signal with SNR 30dB、20dB、10dB

表 1 主奇异值和主特征值个数

Tab.1 Numbers of main eigenvalue and main singular value

信噪比	30dB		20dB		10dB	
	特征值	奇异值	特征值	奇异值	特征值	奇异值
阶次	6	6	6	6	6	6

表 2 ESPRIT 仿真结果

Tab.2 ESPRIT stimulation result

原信号	幅度/V			原信号	频率/Hz		
	ESPRIT				ESPRIT		
	30dB	20dB	10dB		30dB	20dB	10dB
64.933	65.931	66.755	68.23	25	25.521	24.623	24.291
100	101	98.309	100.46	50	49.525	49.698	50.432
74.813	74.921	71.978	78.314	125	124.82	125.59	127.86

键在于对检测信号自相关函数阵求主奇异值和主特征值进行“定阶”。本文通过理论推导和 matlab 仿真验证两种“定阶”方法本质上是等价的, 定阶的时候可以采用奇异值分解也可以采用特征值分解。然而由于采样点有限导致自相关函数估计出现偏差, 两种方法在信噪比较低的时候都存在定阶不准的问题导致伪谱的出现。增加采样点数可以提高自相关函数的估计精度, 然而带来计算量的增加和实时性下降, 更高精度的定阶方案有待进一步研究。

参考文献

[1] 王柏林. 频谱小偏差校正新方法 [J]. 电力系统自动化, 2005, 29(20): 46-49.
WANG Bo-lin. Novel Small Synchronous Error Correction Method in Spectrum Analysis[J]. Automation of Electric Power Systems, 2005, 29(20): 46-49.

[2] F.J. Harris. On the use of windows for harmonic analysis with the discrete Fourier transform[J]. Proceedings of the IEEE, 1978, 66(1): 51-83.

[3] V. H. Jain, W. L. Collins, D. C. Davis. High-accuracy analog measurements via interpolated FFT [J]. IEEE Transactions on Instrum. Meas. 1979, vol. 1M-28: 113-122.

[4] 张伏生, 耿中行, 葛耀中. 电力系统谐波分析的高精度 FFT 算法 [J]. 中国电机工程学报, 1999, 19(3): 63-66.
Zhang Fusheng, Geng Zhongxing, Ge Yaozhong. FFT algorithm with high accuracy for harmonic analysis in power system [J]. Proceedings of the CSEE, 1999, 19(3): 63-66.

[5] 张贤达. 矩阵分析与应用 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.

[6] 高培生, 谷湘文, 吴为麟. 基于空间谱和支持向量回归机的间谐波分析 [J]. 电力系统自动化, 2007, 31(24): 67-70.
GAO Peisheng, GU Xiangwen, WU Weilin. Interharmonic analysis based on spatial spectrum and support vector regression machine [J]. Automation of Electric Power Systems, 2007, 31(24): 67-70.

(下转第 21 页)

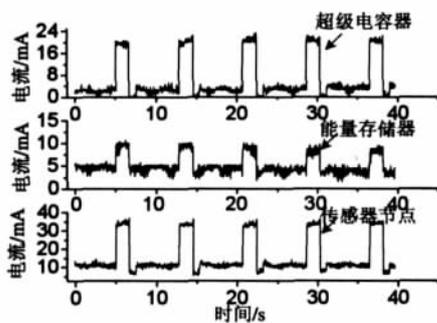


图8 并联供电电流分配图
Fig.8 Current distribution in parallel supply

电池的输 出效率。同时通过并联为传感器节点供电有效减小对能量存储器输出功率密度的要求,减小内部损耗和延长供电时间。

参 考 文 献

[1] Kansal, A. Hsu, J., Srivastava, M. Raqhunathan, V. Harvesting aware power management for sensor networks [J]. Design Automation Conference, 2006.
[2] Vijay Raghunathan, Kansal, A., Friedman, J. Design considerations for

solar energy harvesting wireless embedded systems [J]. Information Processing in Sensor Networks, Fourth International Symposium, 2005.
[3] X. Jiang, J. Polastre, and D. E. Culler. Perpetual environmentally powered sensor networks [J] in Proceedings of the Fourth International Symposium on Information Processing in Sensor Networks, IPSN 2005.
[4] Hongyun Yu, Yanqiu Li, Yonghong Shang, Bo Su. Design and investigation of photovoltaic and thermoelectric hybrid power source for wireless sensor networks [J], Nano/Micro Engineered and Molecular Systems, 3rd IEEE International Conference 2008.
[5] 赵争鸣, 刘建政. 太阳能光伏发电及其应用 [M]. 北京, 科学出版社, 2005.
[6] Brunelli Davide, Benini Luca, Moser Clemens. An Efficient Solar Energy Harvester for Wireless Sensor Nodes [J]. Design, Automation and Test in Europe, 2008.
[7] Simjee, F.I., Chou, P.H. Efficient Charging of Supercapacitors for Extended Lifetime of Wireless Sensor Nodes [J]. Power Electronics, IEEE Transactions on. Volume 23, Issue 3, 2008.
作者简介:
何永泰(1970-), 男, 副教授, 博士在读, 主要从事光电技术、微纳技术及微能源等方向研究。Email: hyt_127@yahoo.com.cn
黄文卿, 男, 副教授, 硕士, 主要从事程序设计、电路分析等方向研究。
收稿日期 2008-11-18
(杨长江 编发)

(上接第 8 页)

[7] 王志群, 朱守真, 周双喜. 基于 Pisarenko 谐波分解的间谐波估算方法 [J]. 电网技术, 2004, 28(15): 72-77.
WANG Zhi-qun, ZHU Shou-zhen, ZHOU Shuang-xi. Inter-harmonics Estimation by Pisarenko Harmonic Decomposition Method [J]. Power System Technology, 2004, 28(15): 72-77.
[8] Tadeusz Lobos, Zbigniew Leonowicz. High-Resolution Spectrum Estimation Methods for Signal Analysis in Power Systems [J]. IEEE Transactions on. Instrum. Meas. 2006, 55(1): 219-225.
[9] Zbigniew Leonowicz, Tadeusz Lobos, and Jacek Rezmer. Advanced Spectrum Estimation Methods for Signal Analysis in Power Electronics [J]. IEEE Transactions on. industrial electronics, 2003, 50(3): 514-518.
[10] 田伟, 王洪希, 白晶. 基于互高阶谱 MUSIC 法的间谐波检测 [J]. 继电器, 2007, 35(22): 49-52.
TIAN Wei, WANG Hong-xi, BAI Jing. Inter-harmonics parameter estimation on crosshigh-spectrum based on MUSIC method [J]. Relay, 2007, 35(22): 49-52.
[11] 丁屹峰, 程浩忠. 基于 Prony 算法的谐波和间谐波频谱估计 [J]. 电工技术学报, 2005, 20(10): 94-97.
Ding Yifeng, Cheng Haozhong etc. Spectrum Estimation of Harmonics and Interharmonics Based on Prony Algorithm [J]. Transactions of china electrotechnical society, 2005, 20(10): 94-97.
[12] 沈睿佼, 杨洪耕, 吴昊. 基于奇异值总体最小二乘法的间谐波估计算法 [J]. 电网技术, 2006, 30(23): 45-49.
SHEN Rui-jiao, YANG Hong-geng, WU Hao. An Algorithm of Interharmonic Estimation Based on Singular Value Decomposition Total

Least Square [J]. Power System Technology 2006, 30(23): 45-49.
[13] 薛蕙, 杨仁刚. 基于连续小波变换的非整数次谐波测量方法 [J]. 电力系统自动化, 2003, 27(5): 49-53.
XUE Hui, YANG Rengang. A novel method for non-integer harmonics measurement using continuous wavelet transform [J]. Automation of Electric Power Systems, 2003, 27(5): 49-53.
[14] 赵成勇, 何明锋. 基于复小波变换相位信息的谐波检测算法 [J]. 中国电机工程学报, 2005, 25(1): 38-42.
Zhao Chengyong, He Mingfeng. A novel method for harmonic measurement using phase information of complex wavelet transform [J]. Proceedings of the CSEE, 2005, 25(1): 38-42.
[15] 李天云, 程思勇, 杨梅. 基于希尔伯特-黄变换的电力系统谐波分析 [J]. 中国电机工程学报, 2008, 28(4): 109-113.
LI Tian-yun, CHENG Si-yong, YANG Mei. Power System Harmonic Analysis Based on Hilbert-Huang Transform [J]. Proceedings of the CSEE, 2008, 28(4): 109-113.
作者简介:
熊杰锋(1976-), 南京信息工程大学电子与信息工程学院讲师, 现为河海大学电气院博士生, 研究方向为电能质量、谐波分析。Email: jifengxiong@163.com。
王柏林(1948-), 河海大学电气院教授、博导、博士, 主要从事自适应控制、电能质量、谐波分析等方面的研究。
孙艳(1974-), 硕士, 江苏省地方税务局计算机中心工程师。
收稿日期 2009-01-12
(杨长江 编发)